Академия наук СССР
Башкирский филиал
Отдел физики и математики

А.Б.Шабат, Р.И.Ямилов

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ТИПА I И МАТРИЦЫ КАРТАНА

Препринт доклада Президиуму Башкирского филиала АН СССР

Уфа - 1981 г.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ТИПА I И МАТРИЦЫ КАРТАНА. А.Б.Шабат, Р.И.Ямилов. Башкирский филиал АН СССР, 1981.

Рассматриваются экспоненциальные системы уравнений с частными производными интегрируемые в квадратурах. На основе исследования структуры алгебры Ли-Беклунда, допускаемой экспоненциальной системой, устанавливается, что список интегрируемых систем определяется матрицами Картана простых конечномерных алгебр Ли.

© БФАН СССР, 1981 г.

Введение

Интегрируемость системы уравнений $u_{z\bar{z}} = F(u)$ определяется свойствами характеристической алгебры Ли, задаваемой векторным полем $F(u)$ (см.[5]). В связи с этим возникает задача о классификации конечномерных (тип I) и допускающих конечномерное представление (тип П) характеристических алгебр. Мы рассмотрим экспоненциальные системы уравнений (ср.[5]). Экспоненциальная система с матрицей коэффициентов $A = (a_{ij})$ записывается в виде

$$u^i_{z\bar{z}} = e^{v^i}, \quad v^i = a_{i1}u^1 + \ldots + a_{ir}u^r, \quad i = 1,\ldots,r \qquad (I)$$

Если A - матрица Картана простой алгебры Ли, то эта система интегрируется в квадратурах (см.[3], [4]).

Относительно системы уравнений (I) с произвольной матрицей A в работе [5] высказана гипотеза о совпадении характеристической алгебры $\chi(A)$ с порожденной положительными корнями подалгеброй $G_+(A)$ контрагредиентной алгебры Ли канонически ассоциированной с матрицей A. Известно (см.[2]), что контрагредиентная алгебра Ли конечномерна тогда и только тогда, когда матрица A эквивалентна одной из матриц Картана простой алгебры Ли. Наша работа посвящена доказательству аналогичного утверждения для характеристических алгебр. Доказательство проводится на основе исследования разрешимости характеристического уравнения и допускает обобщение на случай систем типа П (ср.[5]). Если матрица коэффициентов системы (I) является матрицей Картана, то совпадение алгебр $\chi(A)$ и $G_+(A)$ проверяется непосредственно.

§ I. Описание конечномерных характеристических алгебр.

Нашей целью является описание конечномерных характеристических алгебр $\chi(A)$, соответствующих невырожденным матрицам A. Элементами алгебры $\chi(A)$ являются операторы вида $\sum_{i,j} f_{ij}(u_1,u_2,\dots)\partial/\partial u_j^i$ в пространстве переменных $u_j=(u_j^1,\dots,u_j^r)$, $j\geqslant 1$. Образующие $X_1,\dots,X_r$ алгебры Ли $\chi(A)$ определяются соотношениями

$$X_j D=(D+a_j)X_j, \qquad X_j u_1^k=\delta_j^k, \tag{2}$$

где $D\colon u_j\mapsto u_{j+1}$, $a_j=a_{j1}u_1^1+\dots+a_{jr}u_1^r$. Как векторное пространство характеристическая алгебра порождается кратными коммутаторами следующего специального вида

$$X_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}=ad_{\alpha_1}\cdots ad_{\alpha_{n-1}}X_{\alpha_n}, \quad ad_j\colon Y\mapsto[X_j,Y] \tag{3}$$

п.I. Формулировка классификационной теоремы. Условие невырожденности матрицы A системы уравнений (I) удобно заменить условиями

$$a_{ii}=2, \quad a_{ij}=0\Leftrightarrow a_{ji}=0, \quad a_{ij}=0,-1,-2,\dots \quad (i,j=1,\dots,r,\ i\neq j) \tag{4}$$

Матрицу, удовлетворяющую этим условиям (возможно вырожденную), будем называть обобщенной матрицей Картана. Покажем, что соотношения (4) являются следствием конечномерности алгебры $\chi(A)$ и условия $\det A\neq 0$.

Конечномерность характеристической алгебры означает равенство нулю коммутаторов (3) достаточно большого порядка n. Это следует из разложения

$$\chi(A)\equiv\chi=\chi_1\oplus\chi_2\oplus\dots\oplus\chi_n\oplus\dots,$$

где χ_j – линейное подпространство, натянутое на коммутаторы порядка j. $\chi_j\cap\chi_k=\{0\}$, так как коэффициенты $X_\alpha u_m^i$ оператора $X_\alpha\in\chi_n$ являются обобщенно однородными полиномами степени $m-n$. Для операторов $X_1,\dots,X_r\in\chi_1$ это справедливо в силу формулы (2), а для коммутаторов (3) в силу общей формулы:

$$X_\alpha D=(D+a_{\alpha_1}+\dots+a_{\alpha_n})X_\alpha+X_{[\alpha]},$$

$$X_{[\alpha]}=-a_{\alpha_{n-1}\alpha_n}X_{\alpha/\alpha_n}+\sum_{j=1}^{n-1}c_j X_{\alpha/\alpha_j}, \quad c_j=\sum_{k=j+1}^{n}a_{\alpha_k\alpha_j}, \tag{5}$$

где α/α_j – мультииндекс, полученный из α зачеркиванием компоненты с номером j.

Формула (5) дает, в частности, соотношение

$$X_{\alpha_1\dots\alpha_n}u_n=X_{[\alpha]}u_{n-1}, \quad n\geqslant 2 \tag{6}$$

из которого следует, что при $n\geqslant 1$

$$\begin{aligned}(ad_j^n X_k)u_{n+1}^i&=n\left(a_{kj}+\tfrac{n-1}{2}a_{jj}\right)ad_j^{n-1}X_k u_n^i=\dots=\\&=n!\prod_{p=2}^{n}\left(a_{kj}+\tfrac{p-1}{2}a_{jj}\right)X_{jk}u_2^i=n!\prod_{p=2}^{n}\left(a_{kj}+\tfrac{p-1}{2}a_{jj}\right)\left(a_{kj}\delta_k^i-a_{jk}\delta_j^i\right)\end{aligned} \tag{7}$$

Полагая $a_{jj}=0$, получаем

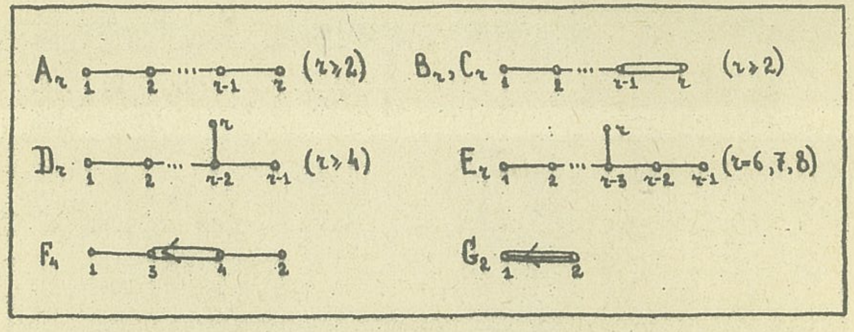
$$ad_j^n X_k u_{n+1}^k=n!\,(a_{kj})^{n-1}$$

Таким образом для конечномерной алгебры из $a_{jj}=0$ следует $a_{1j}=a_{2j}=\dots=a_{rj}=0$, что противоречит невырожденности матрицы A. Итак, можно положить $a_{jj}=2$ $\forall j=1,\dots,r$. Формула (7) при $i=j$ дает $a_{jk}(a_{kj}+1)(a_{kj}+2)\dots(a_{kj}+n)=0$, $n\gg 1$. Соотношения (4) доказаны.

Матрица A порядка r называется разложимой, если для некоторого разбиения множества индексов $\{1,\dots,r\}=J_1\cup J_2$, $J_1\cap J_2=\emptyset$ элементы матрицы A удовлетворяют условиям $a_{ij}=a_{ji}=0$ $\forall\, i\in J_1$, $j\in J_2$. Система уравнений (I) с разложимой матрицей A распадается на две независимые подсистемы. Матрицы систем уравнений (I), отличающихся только нумерацией переменных, будем называть эквивалентными.

Теорема (описание конечномерных характеристических алгебр). Неразложимая обобщенная матрица Картана с конечномерной характеристической алгеброй эквивалентна матрице Картана простой алгебры Ли (см. таблицу I). •

Таблица I



В таблице I приведены графы (схемы Дынкина) матриц Картана. Вершины графа пронумерованы. Ребро $\{i,j\}$ соединяет вершины с номерами i,j, если $a_{ij}a_{ji}\neq 0$. Указанные в таблице графы однозначно определяют матрицы Картана (ср. [I], стр.244, 302-319). Кратность ребра $\{i,j\}$ указывает на величину произведения $a_{ij}a_{ji}=1,2,3$. Стрелка определяет место элемента, не равного (-I). Отметим, что перестановке $u^i\leftrightarrow u^j$ переменных соответствует перестановка $i\leftrightarrow j$ вершин графа.

Замечание. Конечномерность характеристической алгебры, соответствующей одной из матриц Картана следует из соотношений

$$\mathrm{ad}_j^{1-a_{kj}}X_k=0\ ,\quad j\neq k$$

(см. (7)). Действительно, аналогичные соотношения полностью определяют порожденную положительными корнями подалгебру G_+ контрагредиентной алгебры Ли, которая является конечномерной в случае матриц Картана (см. [2]).

Классификационная теорема будет доказана в § 2. Как уже говорилось, доказательство основано на исследовании свойств характеристического уравнения.

п.2. Характеристическое уравнение. Уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}w(u_1,\dots,u_n)=0 \qquad (8)$$

называется характеристическим уравнением системы $u^i_{z\bar z}=F^i(u^1,\dots,u^r)$, $i=1,2,\dots,r$. Оператор

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}=F(u)\frac{\partial}{\partial u_1}+F_{\bar z}(u)\frac{\partial}{\partial u_2}+F_{\bar z\bar z}(u)\frac{\partial}{\partial u_3}+\dots \qquad (9)$$

определяет характеристическую алгебру Ли $\chi(F)$ этой системы. Образующими алгебры $\chi(F)$ являются операторы вида (9), соответствующие различным значениям параметра $u=(u^1,\dots,u^r)$. Легко видеть, что в случае экспоненциальной системы (I), соответствующей обобщенной матрице Картана, так определенная характеристическая алгебра совпадает с алгеброй Ли, порожденной операторами (2).

Лемма I. Характеристическое уравнение (8) системы с конечномерной алгеброй $\chi(F)$, $F=(F^1,\dots,F^r)$, имеет r решений

$$w^k=w^k(u_1,\dots,u_{n_k})\ ,\quad k=1,\dots,r$$

удовлетворяющих условию независимости в главном

$$\det\left[\frac{\partial w^1}{\partial u_{n_1}}, \dots, \frac{\partial w^r}{\partial u_{n_r}}\right] \neq 0$$

Доказательство. Оператор $D = \partial/\partial \bar{z}$ переводит решение уравнения (8) снова в решение. Определим числа $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r$ по индукции. Число n_1 выбирается минимальным из множества чисел n, для которых существует нетривиальное решение порядка n: $w = w(u_1, \dots, u_n)$, $\partial w/\partial u_n \neq 0$, характеристического уравнения. Решение порядка n_1 обозначим w^1 и выберем число $n_2 \geq n_1$ наименьшее, для которого существует решение w^2 порядка n_2 функционально независимое с $w^1, Dw^1, \dots$. Решение w^3 порядка n_3 строится независимым от w^1, w^2, Dw^1, Dw^2, ... и т.д.

Существование решений w^i, $i = 1, \dots, r$ следует из условия конечномерности. Действительно, обозначим через $\mathcal{X}^n = \mathcal{X}^n(F)$ алгебру Ли, порожденную операторами (9) в пространстве функций $w = w(u_1, \dots, u_n)$, и через $\varkappa(n)$ - размерность векторного пространства $[\mathcal{X}^n]$, образованного линейными комбинациями элементов $\mathcal{X}^n$ с коэффициентами из поля рациональных функций от $u_1, \dots, u_n$. Число $N(n)$ функционально независимых решений уравнения (8) выражается формулой (см. [6], стр.16)

$$N(n) = r \cdot n - \varkappa(n), \tag{10}$$

где $\varkappa(n) \leq \dim \mathcal{X}^n \leq \dim \mathcal{X}(F)$. Остается заметить, что число $N_1(n)$ функционально независимых решений вида $f(D^i w^j)$, $j = 1, \dots, r_1$, удовлетворяет неравенству $N_1(n) \leq \sum_{k=1}^{r_1} (n - n_k + 1)$, т.е. $N(n) > N_1(n)$ $(n \gg 1)$ при $r_1 < r$.

Независимость в главном построенных решений доказывается переходом в специальную систему координат. Предполагая, что $\partial w^1/\partial u_{n_1}^{i_1} \neq 0$, сделаем замену $u_{n_1+k}^{i_1} \leftrightarrow D^k w^1$, $k \geq 0$. В новой

системе координат $\partial w^1/\partial u_{n_1}^j = \delta_{i_1}^j$. Если $\partial w^2/\partial u_{n_2}^i = 0$ $\forall\, i \neq i_1$, то функция

$$w^2 = f(u_1, u_2, \dots, u_{n_2-1}, u_{n_2}^{i_1})$$

при любом фиксированном значении переменной $u_{n_2}^{i_1}$ является решением порядка $n_2 - 1$ характеристического уравнения и, в силу минимальности числа n_2, функционально выражается через $D^k w^1$ (напомним, что $u_{n_2}^{i_1} = D^{n_2-n_1} w^1$). Таким образом $\partial w^2/\partial u_{n_2}^{i_2} \neq 0$ при некотором $i_2 \neq i_1$. После замены $u_{n_2+k}^{i_2} \leftrightarrow D^k w^2$ $(k \geq 0)$ имеем $\partial w^1/\partial u_{n_1}^i = \delta_{i_1}^i$, $\partial w^2/\partial u_{n_2}^i = \delta_{i_2}^i$ и т.д. Лемма I доказана.

Пусть $w^1, \dots, w^r$ решения характеристического уравнения указанные в лемме I. Так как матрица $W = (\partial w^i/\partial u_{n_i}^j)$, невырожденная в силу леммы I, удовлетворяет уравнению $W_{\bar{z}} = 0$, то вектор-функция

$$\overset{(n)}{w} = \left(D^{n-n_1} w^1, \dots, D^{n-n_r} w^r\right) W^{-1}$$

является решением того же уравнения. При $n \gg 1$

$$\overset{(n)}{w} = u_n + p_1 u_{n-1} + p_2 u_{n-2} + \dots \tag{11}$$

Подстановка (11) в (8) дает цепочку уравнений для последовательного определения матриц $p_1, p_2, \dots$. Для p_1, в частности, имеем

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} p_1 + \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \;\Rightarrow\; p_1 = p_1(u_1) + h, \quad h_{\bar{z}} = 0$$

Ясно, что решение $\overset{(n)}{w} - \overset{(n-1)}{w} h$ имеет при $n \gg 1$ вид (11), и коэффициент при u_{n-1} зависит только от u_1.

Выберем базис $\{X^i\}$ в множестве операторов (9), соответствующих различным значениям параметра u. Индукцией по номеру j докажем существование векторного решения вида (11), удовлетворяющего условиям

$$p_j = p_j(u_1, \dots, u_j), \quad X^{\alpha_1} X^{\alpha_2} \dots X^{\alpha_k} p_j = q(u_1, \dots, u_{j-k}). \quad (I2)$$

Предположим, что эти условия выполняются при $j < m$. Тогда для элемента φ матрицы p_m имеем

$$\varphi_{\bar z} = \psi(u_1, \dots, u_{m-1}), \quad X^{\alpha_1} \dots X^{\alpha_k} \psi = \omega(u_1, \dots, u_{m-k-1}) \quad (I3)$$

Для φ справедливо второе из условий (I2). Остается проверить, что из существования решения уравнения $\varphi_{\bar z} = \psi$ порядка $\ell > m$ следует существование решения порядка не выше m. Число решений порядка ℓ однородного уравнения $\partial\varphi / \partial\bar z = 0$ определяется, в силу формулы (I0), рангом $\varkappa(\ell)$ матрицы, строки которой состоят из коэффициентов операторов X^i из χ^ℓ и коэффициентов их кратных коммутаторов. С неоднородным уравнением связана расширенная матрица ранга $\varkappa_1(\ell)$, соответствующая оператору $\partial/\partial\bar z + \psi\, \partial/\partial x$.
Из существования решения порядка ℓ неоднородного уравнения и формулы (I0) следует равенство $\varkappa_1(\ell) = \varkappa(\ell)$. Пусть $\varkappa_1(m) > \varkappa(m)$ т.е. отсутствуют решения порядка m. Выберем $m+1$ линейно независимый столбец в расширенной матрице, соответствующей $[\chi^m]$. Дополнив этот набор до базиса в $[\chi^\ell]$ и заметив, что коммутаторы кратностей $m+1, m+2, \dots$ не содержат дифференцирования по дополнительной переменной x, приходим к соотношению $\varkappa_1(\ell) = \varkappa(\ell) + 1$. Полученное противоречие дает (I2).

Возвращаясь к экспоненциальным системам, сформулируем основное свойство конечномерных характеристических алгебр $\chi = \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \dots$.

Лемма 2. Пусть A – обобщенная матрицы Картана, $\dim \chi(A) < \infty$. Тогда любой конечный набор $\{X_\alpha = X_{\alpha_1 \dots \alpha_m}\} \subset \chi_m$ удовлетворяет условию:

$$\sum_\alpha c_\alpha X_{[\alpha]} = 0 \Rightarrow \sum_\alpha c_\alpha \Big(\sum_{k=1}^m a_{\alpha_k} \Big) X_\alpha u^i_m = 0, \quad 1 \le i \le r$$

Доказательство. Рассмотрим решение вида (II) характеристического уравнения

$$w_i = u^i_n + p_1 u_{n-1} + \dots + p_m u_{n-m} + \dots \quad (n \gg 1) \quad (I4)$$

Обозначив через φ одну из компонент вектора p_m, в силу (I2), (I3), имеем

$$\varphi = \varphi(u_1, \dots, u_m), \quad \frac{\partial}{\partial\bar z} \frac{\partial\varphi}{\partial u_m} = 0$$

После перехода в специальную систему координат (см. лемму I) систему уравнений

$$\partial\varphi / \partial u^i_m = f_i, \quad \partial f_i / \partial\bar z = 0, \quad 1 \le i \le r$$

нетрудно привести к виду, в котором $f_i = 0$, если переменная u^i_m заменена на решение уравнения (8). В силу условий совместности оставшиеся $f_i = \mathrm{const}$, поэтому

$$\varphi = \mathrm{const} \cdot u_m + \omega + \varphi_1(u_1, \dots, u_{m-1}), \quad \omega_{\bar z} = 0.$$

Иначе говоря (см. (6))

$$X_\alpha p_m = X_{[\alpha]} p_m$$

Применив оператор $X = \sum c_\alpha X_\alpha$ к решению (I4), получаем

$$0 = X w_i = X u^i_n + (X p_m) u_{n-m} + \dots =$$

$$= X u^i_n + \Big(\sum c_\alpha X_{[\alpha]} p_m \Big) u_{n-m} + \dots = X u^i_n + \dots$$

Здесь и в дальнейшем многоточие обозначает члены, зависящие только от переменных $u_1, \dots, u_{n-m-1}$. Справедливы соотношения:

$$X u^i_n = X D u^i_{n-1} = D X u^i_{n-1} + \sum c_\alpha X_{[\alpha]} u^i_{n-1} + \dots =$$

$$= D X u^i_{n-1} + \dots = D^2 X u^i_{n-2} + \dots = \dots = D^{n-m-1} X u^i_{m+1}.$$

Таким образом $Xu^i_{m+1}=0$ и утверждение леммы следует из формулы (5).

§ 2. Доказательство классификационной теоремы.

Мы покажем, что для любой не содержащейся в таблице I матрицы A (неразложимой, удовлетворяющей условиям (4)), либо при некотором $n \leqslant 4$ $\dim \mathcal{X}_{n+1}(A) > \dim \mathcal{X}_n(A)$, и применима лемма 2, либо характеристическая алгебра $\mathcal{X}(A)$ имеет бесконечномерную подалгебру, соответствующую вырожденной матрице. Тем самым будет доказана классификационная теорема (§ I,I).

п.I. Условия конечномерности подалгебр с 2 или 3 образующими. Пусть A – неразложимая обобщенная матрица Картана порядка $r=2$. В силу формулы (5)

$$X_{[112]}=2(1+a_{21})X_{12}, \quad X_{[212]}=2(1+a_{12})X_{12}.$$

Лемма 2 дает

$$(1+a_{12})(2a_1+a_2)X_{112}u_3-(1+a_{21})(a_1+2a_2)X_{212}u_3=$$
$$=(1+a_{12})a_1X_{112}u_3-(1+a_{21})a_2X_{212}u_3=0$$

В силу формулы (6)

$$X_{112}u_3=2(1+a_{21})X_{12}u_2, \quad X_{212}u_3=2(1+a_{12})X_{12}u_2.$$

Поэтому

$$(1+a_{12})(1+a_{21})(a_1-a_2)X_{12}u_2=0$$

Так как неразложимость матрицы A означает $X_{12}u_2\neq 0$, то

$$(1+a_{12})(1+a_{21})=0$$

Полагая, для определенности, $a_{12}=-1$, получаем $X_{212}=X_{2112}=0$ и

$$X_{[11112]}=4(3+a_{21})X_{1112}, \quad X_{[21112]}=-X_{1112}.$$

Лемма 2 дает

$$(1+a_{21})(2+a_{21})(3+a_{21})=0$$

Полученный результат обобщается. Рассматривая подалгебры с двумя образующими, убеждаемся, что справедливо следующее

Предложение I. Элементы обобщенной матрицы Картана $A=(a_{ij})$ с конечномерной характеристической алгеброй удовлетворяют условию

$$\forall\, i\neq j \quad a_{ij}a_{ji}=0,1,2,3$$

Доказанное утверждение исчерпывает вопрос о классификации матриц второго порядка (ср. табл.I).

Предложение 2. Элементы неразложимой обобщенной матрицы Картана $A=(a_{ij})$ $(r>2,\ \dim\mathcal{X}(A)<\infty)$ удовлетворяют условию: $a_{ij}a_{ji}\neq 3$.

Доказательство. Достаточно, рассматривая матрицу $A=(a_{ij})$ порядка 3 с элементами $a_{32}=-3$, $a_{23}=-1$, показать, что $a_{12}+a_{13}=0$. Проверим следующее:

$$a_{12}a_{13}\neq 0 \Rightarrow a_{12}a_{21},\ a_{13}a_{31}\neq 2,3$$

Если $a_{12}a_{21}=2,3$, то

$$2(a_{12}-a_{21})\left[3X_{[213]}+(a_{12}-3)X_{[123]}\right]+$$
$$+\left[3(a_{13}-1)+a_{12}\right]\left(X_{[112]}+X_{[221]}\right)+cX_{[223]}=0$$

при подходящем выборе постоянной c. Полагая $i=1$ в лемме 2, находим

$$(3a_{13}+a_{12}-3)\left[(a_1-a_3)X_{112}u^1_3+(a_2-a_3)X_{221}u^1_3\right]=0.$$

Получено противоречие, так как $3a_{13}+a_{12}-3<0$ и один из операторов X_{112}, X_{221} равен нулю. Аналогично приводится к противоречию предположение $a_{13}a_{31}=2,3$.

Докажем теперь, что $a_{12}a_{13}=0$. В противном случае $a_{12}a_{21}=a_{13}a_{31}=1$, и

$$X_{[1223]}-X_{[2223]}-2X_{[1123]}=0,$$

что противоречит условию конечномерности, так как при $i=1$ в лемме 2, имеем $(a_1-a_2)X_{123}u_3^1=0$.

Если $a_{12}a_{21}=0$, $a_{13}a_{31}>1$, то тождество

$$X_{[123]}+\frac{1}{4}a_{31}X_{[223]}+\frac{3}{2}(a_{31}-a_{13})^{-1}\left(X_{[113]}+X_{[331]}\right)=0$$

приводит к противоречию с условием $\dim \mathcal{X}(A)<\infty$. Аналогично исключается случай $a_{13}a_{31}=0$, $a_{12}a_{21}>1$.

Осталось рассмотреть две матрицы с элементами $a_{12}a_{21}=1$, $a_{13}a_{31}=0$ и $a_{13}a_{31}=1$, $a_{12}a_{21}=0$, соответственно. Графы этих матриц содержатся в таблице 3 (см. п.2) вырожденных матриц с бесконечномерной характеристической алгеброй (первая матрица совпадает с N^2, вторая переводится в N^1 заменой $u^2 \leftrightarrow u^3$). Доказательство закончено.

Предложение 3. Пусть $A=(a_{ij})$ - неразложимая обобщенная матрица Картана порядка $r \geqslant 3$, $\dim \mathcal{X}(A)<\infty$. Тогда

$$a_{ij}a_{ji}=2 \Longrightarrow a_{ik}a_{ki},\ a_{jk}a_{kj} \neq 2, \quad k \neq i,j.$$

Доказательство. Предположим для определенности, что $a_{ij}a_{ji}=a_{ik}a_{ki}=2$. Тогда

$$X_{[kij]}+\frac{a_{ji}}{a_{ki}}X_{[jik]}-\frac{2+a_{jk}a_{ki}+a_{ji}a_{ik}}{2a_{ki}(3+2a_{ji})}\left(X_{[iij]}+X_{[jji]}\right)-$$

$$-\frac{2+a_{kj}a_{ji}+a_{ki}a_{ij}}{2a_{ki}(3+2a_{ki})}\left(X_{[iik]}+X_{[kki]}\right)=0$$

Лемма 2 дает

$$(a_i-a_k)X_{iij}u_3^j+(a_j-a_k)X_{jji}u_3^j=0,$$

где, в силу формулы (6), $(X_{iij}u_3^j)(X_{jji}u_3^j)=0$. Получено противоречие.

Завершим классификацию матриц третьего порядка. В силу доказанного выше $a_{ij}a_{ji}\leqslant 2$. В случае $\max a_{ij}a_{ji}=2$ ровно один внедиагональный элемент равен - 2. Полагаем $a_{32}=-2$. При $a_{12}a_{13}=0$ неразложимая матрица A эквивалентна одной из матриц Картана B_3, C_3. При $a_{12}a_{13}\neq 0$

$$10X_{[1312]}+12X_{[2312]}-6X_{[3312]}-3X_{[2213]}+5X_{[1223]}=0 \quad (15)$$

Воспользовавшись леммой 2 убеждаемся в бесконечномерности характеристической алгебры этой матрицы. В случае $\max a_{ij}a_{ji}=1$ матрица A эквивалентна матрице Картана A_3 при $a_{12}a_{13}a_{23}=0$. Наконец, если $a_{12}a_{13}a_{23}\neq 0$, то $a_{12}=a_{13}=a_{23}=-1$ и A совпадает с матрицей M_3^1 третьего порядка из таблицы 2 (см. п.2) матриц с бесконечной алгеброй.

п.2. Стандартные бесконечномерные подалгебры. Доказательство классификационной теоремы сводится к отысканию бесконечных подалгебр. В процессе доказательства выясняется, что любая бесконечная характеристическая алгебра, удовлетворяющая перечисленным в предложениях I,2,3 условиям, содержит подалгебру, соответствующую одной из матриц таблиц 2,3.

Таблица 2

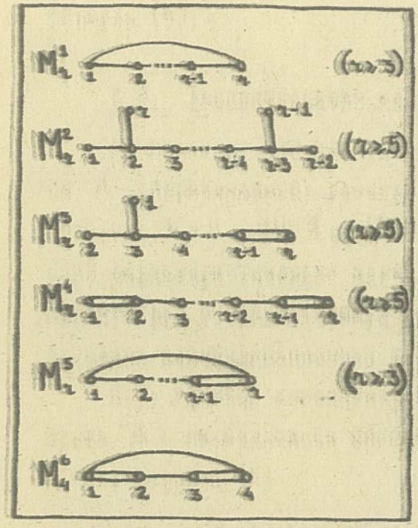
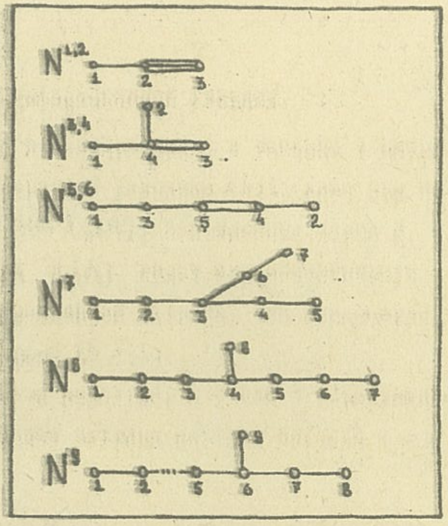


Таблица 3



Матрицы условно разделены на две таблицы. Бесконечность алгебр матриц таблицы 2 доказывается при помощи леммы 2 из § I. Матрицы, для которых применение леммы 2 затруднительно или невозможно, отнесены в таблицу 3 вырожденных матриц (бесконечномерность соответствующих алгебр проверяется отдельно).

Имея в виду таблицу 2, выпишем соотношения $\sum c_\alpha X_{[\alpha]}=0$, указывающие на применимость леммы 2. При использовании леммы 2 некоторые коэффициенты не существенны (ср. доказательство предл.3); они не выписаны в явном виде.

$$M^1_r:\ X_{[r,1]}+\sum_{k=1}^{r-1} X_{[k,k+1]}=0,$$

$$M^2_r:\ \sum_{k=3}^{r-4} X_{[k-1,k,k+1]}+\frac{1}{2}\left(X_{[123]}+X_{[32r]}-X_{[12r]}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(X_{[r-1,r-3,r-2]}-X_{[r-1,r-3,r-4]}-X_{[r-4,r-3,r-2]}\right)=0,\ r\geq 6,$$

$$M^2_5:\ X_{[312]}-X_{[512]}+X_{[423]}-X_{[524]}=0,$$

$$M^3_r:\ X_{[123]}+X_{[154]}+X_{[234]}+2\sum_{k=4}^{r-22} X_{[k-1,k,k+1]}+$$
$$+c_1 X_{[r-2,r-1,r]}+c_2\left(X_{[r-1,r-1,r]}+X_{[r,r,r-1]}\right)=0,$$

$$M^4_r:\ -(3+2a_{21})^{-1}\left(X_{[112]}+X_{[221]}\right)+2X_{[123]}+2a_{21}\sum_{k=3}^{r-2} X_{[k-1,k,k+1]}+$$
$$+c_1 X_{[r-2,r-1,r]}+c_2\left(X_{[r-1,r-1,r]}+X_{[r,r,r-1]}\right)=0,$$

$$M^5_r:\ X_{[21r]}+\frac{1}{a_{r,r-1}}X_{[r-1,1,r]}+\sum_{k=22}^{r-22} X_{[k-1,k,k+1]}+$$
$$+c_1 X_{[r-2,r-1,r]}+c_2\left(X_{[r-1,r-1,r]}+X_{[r,r,r-1]}\right)=0,\ r\geq 4,$$

$$M^6_4:\ -\frac{a_{34}}{6+4a_{21}}\left(X_{[112]}+X_{[221]}\right)+a_{34}X_{[123]}+a_{21}X_{[234]}+$$
$$+c\left(X_{[334]}+X_{[443]}\right)=0.$$

Замечание. Применимость леммы для матрицы M^5_3 из таблицы проверена ранее (см. (I5)).

Вырожденные матрицы из таблицы 3 рассматриваются единообразно. Для любой матрицы N^m, $1\leq m\leq 9$ функции v^j (см. (I)) связаны линейной зависимостью вида $v^r=c_1 v^1+\ldots+c_{r-1}v^{r-1}$, т.е. полученная из (I) система уравнений

$$v^j_{z\bar z}=\sum_{k=1}^{r} a_{jk}e^{v^k}=F^j,\quad 1\leq j\leq r-1,$$

является замкнутой. В предположении конечномерности алгебры $\chi(N^m)$ характеристическое уравнение этой системы имеет $r-1$ решение (см. (II), (I2)):

$$w_i = v_n^i + \sum_{j,k=1}^{r-1} c_k^{ij}\, v_1^k\, v_{n-1}^j + \dots$$

Отсюда

$$\frac{\partial F^i}{\partial v^j} + \sum_{k=1}^{r-1} c_k^{ij} F^k = 0 \qquad (I6)$$

Для приведенных в таблице матриц соотношение (I6) при $i=j=1$ приводит к противоречию. Например для матрицы N^2 ($a_{23}=-3$)

$$F^1 = 2e^{v^1} - e^{v^2}, \quad F^2 = -e^{v^1} + 2e^{v^2} - e^{v^3}, \quad v^3 = -v^1 - 2v^2,$$

$$\frac{\partial F^1}{\partial v^1} = 2e^{v^1} = -c_1^{11} F^1 - c_2^{11} F^2,$$

что противоречит линейной независимости функций $\exp v^1$, F^1, F^2.

п.3. Случай $\max a_{ij}a_{ji} = 2$. При изучение подалгебр характеристической алгебры $\chi(A)$ возникает вопрос о неразложимости матрицы $A_{i_1,\dots,i_k}$, составленной из элементов матрицы A, лежащих на пересечении строк и столбцов с номерами $i_1,\dots,i_k$. Алгебра $\chi(A_{i_1\dots i_k})$ имеет образующими операторы $X_{i_1},\dots,X_{i_k}$.

Лемма. Для неразложимой матрицы A порядка r существует нумерация переменных $u^1,\dots,u^r$, в которой матрица $A_{2,3,\dots,r}$ также неразложима.

Доказательство. Предположим, что матрица $A_{k,k+1,\dots,r}$ ($k\le r$) неразложима. В силу неразложимости матрицы A найдется элемент $a_{ij}\ne 0$, $i<k$, $j\ge k$. После перестановки $u^i \leftrightarrow u^{k-1}$ получаем неразложимую матрицу $A_{k-1,k,\dots,r}$.

Предложение 4. В случае $\max a_{ij}a_{ji}=2$ утверждение класси-

фикационной теоремы справедливо при дополнительном предположении: $a_{r,r-1}=-2$, $a_{ij}=0,-1$ при $(i,j)\ne(r,r-1)$.

Доказательство проводится индукцией по порядку r матрицы A. Предположим, что при $r<n$ ($n>5$) утверждение доказано. Можно считать, что матрица $A_{2,3,\dots,n}$ совпадает с одной из матриц Картана B_{n-1}, C_{n-1} (см. лемму).

Рассмотрим элементы первой строки матрицы A и предположим, что $a_{13}+\dots+a_{1n}\ne 0$. Если при $i:j>2$ $a_{1i}a_{1j}\ne 0$, то $\dim\chi(A)=\infty$, так как матрица $A_{1,j,\dots,n}$ отличается от матрицы Картана лишними минус единицами в первой строке, т.е. граф имеет узел (см. табл.I). Итак существует только один ненулевой элемент a_{1i}, $i>2$.

При $a_{1i}\ne 0$, $2<i<n$ рассматрим матрицу $A_{1,i-1,i,\dots,n}$ порядка $r=n-i+3\ge 4$. В этой матрице элемент $a_{1,i-1}=0$, так как в противном случае подалгебра с образующими X_1, X_{i-1}, X_i совпадает с алгеброй $\chi(M_3^1)$ (см. табл.2). При $r=4$ матрица $A_{1,i-1,i,\dots,n}$ совпадает с одной из матриц N^3, N^4 таблицы 3, а при $r>4$ с матрицей M_r^3 таблицы 2.

При $a_{1n}\ne 0$ матрица $A_{1,n-3,n-2,n-1,n}$ эквивалентна одной из вырожденных матриц N^5, N^6 таблицы 3. Таким образом у матрицы A с конечномерной алгеброй $a_{13}+\dots+a_{1n}=0$.

Для завершения доказательства осталось рассмотреть матрицы порядков $r=4,5$. Если $A_{2,3,\dots,r}$ совпадает с B_{r-1} или C_{r-1}, то из приведенных выше соображений следует, что $a_{1i}=0$, $2<i<n$. При $a_{1r}=0$, A - матрица Картана. При $a_{1r}=-1$ матрица A эквивалентна одной из следующих: M_r^5 ($a_{12}\ne 0$), F_4 ($a_{12}=0$, $r=4$), $N^{5,6}$ ($a_{12}=0$, $r=5$). Пусть, наконец, $A_{2345}=F_4$. Тогда $a_{13}+a_{14}+a_{15}\ne 0$, так как в противном случае $A\sim N^5$. Рассматривая матрицу A_{1345} убеждаемся в том, что либо $a_{13}=-1$,

$a_{14}=a_{15}=0$; либо $a_{14}=-1$, $a_{13}=a_{15}=0$. Если $a_{12}=-1$, то $A\sim M_5^5$ $(a_{13}=-1)$, $A_{124}=M_3^1$ $(a_{14}=-1)$. Если $a_{12}=0$, то $A=N^5$ $(a_{13}=-1)$, $A_{1245}\sim N^3$ $(a_{14}=-1)$. Предложение 4 доказано.

Предложение 5. Утверждение классификационной теоремы справедливо в случае $\max a_{ij}a_{ji}=2$.

Доказательство. Пусть A – матрица порядка 4, удовлетворяющая условию $a_{12}a_{21}=a_{34}a_{43}=2$. Остальные произведения $a_{ij}a_{ji}=0,1$ в силу предложения 3. При этом $a_{13}a_{14}=0$ $(a_{14}a_{24}=0)$, так как иначе A_{134} $(A_{124})\sim M_3^1$. Аналогично $a_{23}a_{24}=a_{13}a_{23}=0$ и, следовательно, рассматриваемая матрица A эквивалентна матрице с элементами такими, что

$$a_{12}a_{21}=a_{34}a_{43}=2,\quad a_{23}a_{32}=1,\quad a_{13}=a_{24}=0$$

При $a_{14}=-1$, $A=M_4^6$. Остается заметить, что соотношение $\sum c_\alpha X_{[\alpha]}=0$, определяющее применимость леммы 2 из § I к матрице M_4^6, остается справедливым при $a_{14}=0$. Легко видеть, что для матрицы A произвольного порядка из доказанного следует, что

$$a_{ij}a_{ji}=a_{kl}a_{lk}=2 \Rightarrow a_{ik}+a_{il}+a_{jk}+a_{jl}=0 \qquad (I7)$$

Дальнейшее доказательство основано на предложении 4. Рассмотрим матрицу A порядка $r>4$ с $m+1$ $(m>0)$ элементами $a_{ij}=-2$. Выберем нумерацию (см. предл.3), в которой

$$a_{21}=a_{43}=\ldots=a_{2m,2m-1}=a_{r,r-1}=-2.$$

Независимо от того, разложима матрица $A_{2m+1,\ldots,r}$ или нет, существует нумерация входящих в нее переменных такая, что при некотором $k>2m$ матрица $A_{k,k+1,\ldots r}$ неразложима и $a_{ij}=0$ при $j\geq k$, $2m<i<k$. Эта матрица удовлетворяет условиям

предложения 4 и эквивалентна, таким образом, одной из матриц Картана F_4, B_{r-k+1}, C_{r-k+1}. Считаем в дальнейшем, что матрица $A_{k,\ldots,r}$ имеет канонический вид, указанный в табл.I. В силу неразложимости матрицы A найдется номер $p<m$ такой, что $a_{2p,q}+a_{2p-1,q}\neq 0$ при некотором $k\leq q<r-1$. При $a_{2p,q}+a_{2p-1,q}=-2$ матрица $A_{2p-1,2p,q}$ эквивалентна матрице M_3^5, т.е. можно считать, что $a_{2p,q}=-1$, $a_{2p-1,q}=0$. Выбрав q максимальным, перейдем к матрице $A_{2p-1,2p,q,q+1,\ldots,r}$ порядка пять или более. Легко проверить, что характеристическая алгебра этой матрицы имеет подалгебру, совпадающую с $\chi(M_n^4)$. Предложение 5 доказано.

п.4. Случай $\max a_{ij}a_{ji}=1$.

Предложение 6. Утверждение классификационной теоремы справедливо в случае $\max a_{ij}a_{ji}=1$.

Доказательство. Пусть предложение доказано для всех порядков $n<r$. Рассматривая матрицу A порядка r, считаем, как и в предл.5, что матрица $A_{1,2,\ldots,r-1}$ совпадает с одной из матриц Картана. Покажем, что в последней строке матрицы A существует единственный элемент $a_{rk}=-1$ такой, что $k<r-1$. Действительно, если $a_{rk}=a_{rp}=-1$ при $k<p<r-1$, то граф матрицы $A_{1,2,\ldots,r-2,r}$ порядка, меньшего r, содержит цикл, что противоречит предположению индукции.

Случай I: $A_{12\cdots r-1}=A_{r-1}$. При $a_{rk}=a_{r,r-1}=-1$ $(k<r-1)$ матрица $A_{k,k+1,\ldots,r}=M_{r-k-1}^1$. Следовательно только один из элементов a_{rk} $(k=1,\ldots,r-1)$ последней строки матрицы A отличен от нуля. При $k\in\{1,r-1\}\cup\{2,r-2\}$, $r\geq 4$, матрица A эквивалентна A_r, D_r, соответственно. При $r=6,7,8$ и $k\in\{3,r-3\}$ матрица A эквивалентна E_r. Таким образом осталось рассмотреть случаи: $3<k<r-3$ $(r>5)$, $k\in\{3,r-3\}$ $(r>8)$.

При $3<k<r-3$ $(r>5)$ вершина с номером k является точкой ветвления графа матрицы $A_{1,2,\dots,r-2,r}$. По предположению индукции $\dim \mathcal{X}(A_{1,\dots,r-2,r})=\infty$.

Если $k\in\{3,r-3\}$ $(r>8)$, то при $a_{r,r-3}=-1$ матрица $A_{r-8,r-7,\dots,r}=N^9$. При $a_{r,3}=-1$ рассуждения аналогичны.

Случай 2: $A_{1,2,\dots,r-1}=D_{r-1}$. Пусть $a_{r,r-1}=a_{rk}=-1, k<r-1$. При $k<r-2$ матрица $A_{k,k+1,\dots,r-3,r-1,r}=M^1_{r-k-2}$, а при $k=r-2$ матрица $A_{r-3,r-2,r-1,r}=M^1_4$. Таким образом, как и в случае I, в последней строке матрицы A находится единственный элемент $a_{rk}=-1$ $(k=1,\dots,r-1)$. При $k=1$, $r\geqslant 4$ матрица $A\sim D_r$. При $k\in\{r-2,r-1\}$, $r=6,7,8$ матрица A эквивалентна E_r. При $k=r-2,r-1$, $r=4,5$ матрица A эквивалентна A_4, D_5, соответственно. Поэтому осталось рассмотреть случаи: $1<k<r-2$ $(r>5)$, $k=r-2,r-1$ $(r>8)$, $k=2$ $(r=5)$.

При $2<k<r-2$ $(r>5)$ граф матрицы $A_{2,3,\dots,r}$ имеет две точки ветвления. При $k=2$ $(r\geqslant 5)$ матрица A совпадает с M^2_r. При $k=r-2,r-1$ $(r>8)$ матрица $A_{r-8,r-7,\dots,r}$ эквивалентна N^9.

Случай 3: $A_{1,2,\dots,r-1}=E_{r-1}$, $r=7,8,9$. Пусть $r=7$. При $a_{76}=a_{7k}=-1$, $k<5$ граф матрицы A_{123467} имеет цикл. При $a_{76}=a_{75}=-1$ цикл имеет граф матрицы A_{34567}. Поэтому в последней строке матрицы A находится единственный элемент $a_{7k}=-1$ $(k=1,\dots,6)$. При $k=1,5$ матрица A эквивалентна E_7. Осталось исключить случаи $k=2,3,4,6$. При $k=2,3$ матрица A_{123467} не эквивалентна матрицам A_6, D_6, E_6. Случай $k=4$ исключается переходом к матрице шестого порядка

$A_{2,3,\dots,7}$. При $k=6$ $A\sim N^6$;

Переходя к случаям $r=8,9$ заметим, что доказана бесконечность алгебры, соответствующей матрице A порядка 7, удовлетворяющей условиям: $A_{1\dots6}=E_6$, $a_{76}=-1$. При $r=8,9$ матрицы $A_{2,3,\dots,8}$, $A_{3,4,\dots,9}$ удовлетворяют этим условиям и, следовательно, $a_{r,r-1}=0$. Таким образом последняя строка содержит единственный элемент $a_{rk}=-1$, причем $k<r-1$.

При $r=8$, $a_{r1}=-1$ матрица $A\sim E_8$. Случаи $k=2,3,4$ исключаются переходом к матрице седьмого порядка $A_{1\dots578}$. В случае $k=6$ имеем $A\sim N^8$.

При $r=9$, $a_{r1}=-1$ матрица A эквивалентна N^9. Случаи $k=2,3,4,5$ исключаются рассмотрением матрицы восьмого порядка $A_{1\dots689}$. Наконец в случае $k=6$ бесконечна алгебра $\mathcal{X}(A_{23,\dots,9})$. Предложение 6 доказано.

Замечание. Нетрудно построить базис характеристической алгебры, соответствующей матрице Картана из таблицы I. Например, базис алгебры $\mathcal{X}(A_r)$ состоит из коммутаторов вида $X_{m,m+1,\dots,m+n}$ $(1\leqslant m\leqslant m+n\leqslant r)$; базис алгебры $\mathcal{X}(D_r)$ состоит из базисов подалгебр типа A_{r-1}, порожденных операторами $X_1,\dots,X_{r-2},X_{r-1}$ и $X_1,\dots,X_{r-2},X_r$, и коммутаторов вида $X_{r-m,r-m+1,\dots,r-1,r,r-2,r-3,\dots,r-n}$, где $1\leqslant r-n\leqslant r-2$, $r-n<r-m\leqslant r-1$. Доказательство того, что любой ненулевой коммутатор X_α отличается сомножителем от некоторого элемента базиса, проводится индукцией по кратности коммутатора на основе определяющих соотношений (2), (5). Базис характеристической алгебры матрицы Картана совпадает с базисом нильпотентной части простой алгебры Ли, канонически ассоциированной с этой матрицей (см. [I], стр. 302-3I9).

В заключение авторы выражают благодарность А.Н.Лезнову и

В.Г.Смирнову за ценные обсуждения работы и полезные критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

I. Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, Мир, 1972.

2. Кац В.Г., Простые непроводимые градуированные алгебры Ли конечного роста, Изв.АН СССР, сер.мат., 32, № 6, 1968, 1323-1367.

3. Лезнов А.Н., О полной интегрируемости одной нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных в двумерном пространстве, ТМФ, 42, № 3, 1980, 343-349.

4. Leznov A.N., Saveliev M.V., Representation of zero curvature for the system of nonlinear partial differential equations $x_{\alpha, z\bar{z}} = \exp(Kx)_\alpha$ and its integrability, Lett. in Math. Phys., 3, 1979, 489-494.

5. Лезнов А.Н., Смирнов В.Г., Шабат А.Б., Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем, Препринт ИФВЭ 81-11 , Серпухов, 1981.

6. Эйзенхарт Л.П., Непрерывные группы преобразований, ИЛ, 1947.

РТП БФАН СССР. П00128. Тир. 80. Зак.135